Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Una ecuación semilineal abstracta y sus aplicaciones

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Elard Enrique MAXIMILIANO LLANA

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Maximiliano, E. (2019). *Una ecuación semilineal abstracta y sus aplicaciones*. Tesis para optar el título de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...16:20... horas del Viernes 20 de diciembre de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Willy David Barahona Martínez (PRESIDENTE), Mg. Emilio Marcelo Castillo Jiménez (MIEMBRO), Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «UNA ECUACIÓN SEMILINEAL ABSTRACTA Y SUS APLICACIONES», presentado por el señor Bachiller ELARD ENRIQUE MAXIMILIANO LLANA, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

...DIECIOCHO...................................(18). SOBRESALIENTE

A continuación, el Presidente del Jurado, Mg. Willy David Barahona Martínez, manifestó que el señor Bachiller ELARD ENRIQUE MAXIMILIANO LLANA, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ...17:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

MG. WILLY DAVID BARAHONA MARTÍNEZ
PRESIDENTE

MG. EMILIO MARCELO CASTILLO JIMÉNEZ
MIEMBRO

DR. EUGENIO CABANILLAS LAPA
MIEMBRO ASESOR

Hoja de metadatos complementarios

Código ORCID del autor (dato opcional):

Código ORCID del asesor o asesores (dato obligatorio):

https://orcid.org/0000-0002-8941-4394

DNI del autor: 09313163

Grupo de investigación: ECUKI

Institución que financia parcial o totalmente la investigación:

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado (VRIP – UNMSM)

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y/o coordenadas geográficas:

Coordenadas geográficas de San Marcos, Perú, en grados y minutos decimales:

- Longitud: O76°44'33.18"
- Latitud: S7°4'43.36"

Año o rango de años que la investigación abarcó: 2018 - 2019

DEDICATORIA

A todos quienes confiaron en mí.

A mi madre, quién en vida me lleno de amor incomparable.

A mi hermano Ivan, quién en vida siempre me alentó a seguir adelante.

A quienes que con su cariño, amor, compañía, y su aliento, llenan todos los momento atesorables de mi vida.

AGRADECIMIENTO

En principio debo agradecer al ser supremo por haberme bendecido con la vida y buena salud para lograr las metas trazadas en el transcurso de mi vida, de la misma forma debo agradecer a mis padres Manuel y Julia (†) por haber estado siempre a mi lado en este proceso de formación profesional, acompañandome en los momentos de alegría y tristezas.
Asi mismo debo manifestar mi profundo agradecimiento a mi asesor Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, quién con su invalorable orientación, dedicación, paciencia y su gran conocimiento, enriquecieron todas las etapas del desarrollo de mi trabajo de tesis.
También debo aprovechar la oportunidad para agradecer a mis profesores de la facultad de ciencias matemáticas, quiénes con sus conocimientos y sabiduría han contribuido en mi formación profesional. De igual forma a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, que por intermedio del Vicerrectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) y el programa de promoción de tesis; financiaron todas las etapas del trabajo de tesis, que permitieron su culminación exitosa.
Finalmente, y no por ello el menos importante, debo expresar mi gratitud a todos mis compañeros de las distintas facultades, con quiénes he compartido grandes momentos en un espacio acogedor que la universidad nos brindó. De la misma forma agradezco a todos mis compañeros de aula, con quiénes compartí momentos academicos memorables. Agradecimiento muy especial, a mis amigos “los shagis” quiénes me brindaron su amistad y apoyo incondicional en momentos difíciles, gracias amigos.

RESUMEN

En este trabajo consideramos el siguiente problema elíptico semilineal abstracto:

$$Au = Fu \quad \text{en} \quad H \tag{$*$}$$

Donde H es un espacio de Hilbert, $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ es un operador lineal autoadjunto y $F : H \longrightarrow H$ es un operador semilineal monótono.

El objetivo de este trabajo es demostrar la existencia de soluciones para el problema (*). Además, probaremos la unicidad de la solución y daremos algunas aplicaciones a las ecuaciones diferenciales.

PALABRAS CLAVES: Ecuación Semilineal Abstracta, Espacios de Hilbert, Teorema de la contracción .

ABSTRACT

In this work, we consider the following abstract elliptic semilinear problem

$$Au = Fu \;\; \text{in} \;\; H \tag{$*$}$$

where H is a Hilbert space, $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ is a self-adjoint linear operator and $F : H \longrightarrow H$ is a nonlinear monotone operator.

The objetive of this work is to prove the existence of solutions for the problem (*).

Furthermore, we show the uniqueness of solution and some applictions to differential equations are given.

KEY WORDS: Abstract Semilinear Equation , Hilbert Space , Contraction Theorem.

Índice general

Introducción

En Ecuaciones Diferenciales Ordinarias se presenta un problema del tipo:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2\,u}{dt} + \lambda u = f \quad ; \quad en \quad \Omega \\ \text{con condiciones} \quad \text{de} \quad \text{frontera} \end{cases} \tag{1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ y f una función dada, que representa por ejemplo el modelo linealizado y simplificado del oscilador armónico.

En Ecuaciones Diferenciales Parciales, un modelo elíptico lineal clásico es el sistema de Laplace:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \quad ; \quad en \quad \Omega \\ \text{con condiciones} \quad \text{de} \quad \text{frontera} \end{cases} \tag{2}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada , donde Ω es un conjunto abierto, acotado y bien regular de $\mathbb{R}^n$. Cuando la función f, llamada el término fuerza externa, depende de u se tiene una ecuación del tipo semilineal:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u) \quad ; \quad en \quad \Omega \\ \text{con condiciones} \quad \text{de} \quad \text{frontera .} \end{cases} \tag{3}$$

Generalizando el sistema (3) con el operador elíptico del tipo:

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \lambda u,$$

denotando $F(u) = f(u) - \lambda u$ y colocando condiciones de Dirichlet nulas en la frontera, obtenemos el sistema que es motivo de nuestro trabajo :

$$\begin{cases} Au = Fu \quad & en \quad \Omega \\ u = 0 \quad & en \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Aún más, el sistema (4) puede ser colocado en la forma de una ecuación abstracta del tipo:

$$Au = \widetilde{F}u \quad \text{en} \quad H. \tag{5}$$

siendo H un espacio de funciones (por ejemplo, un espacio de Sobolev).
Diversos autores han estudiado la ecuación (5), desde diferentes puntos de vista imponiendo condiciones sobre A y $\widetilde{F}$. En particular Amann [1], impuso las condiciones de que A es lineal, autoadjunto, con resolvente $\rho(A)$ y $\widetilde{F}$ un operador gradiente Gateaux diferenciable, con esta no linealidad interactuando con el espectro de A; Teodorescu [19] probó un resultado de existencia y unicidad, con la única condición sobre F, de ser un operador Lipschitz.
En el presente trabajo estudiamos la ecuación:

$$A(u) + F(u) = 0 \quad \text{en} \quad H. \tag{6}$$

sin imponer las condiciones de ser el operador A autoadjunto y de ser F Gateaux diferenciable, además de retirar la dependencia de la no linealidad de F con el espectro de A. Sin embargo pedimos que el operador A, sea máximal monótono y que F sea fuertemente monótono y Lipzchitziano. Nuestro trabajo se basa en el trabajo de Mortici [16], que aportará al entendimiento de la metodología de resolución de la ecuación abstracta (6) permitiendo comprender las técnicas matemáticas usuadas para afrontar modelos más complicados, lo que es de suma importancia para la comunidad matemática de nuestro país.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo incluiremos las definiciones y teoremas que serán necesarias para lograr el objetivo trazado en el presente trabajo de tesis, mencionaremos resultados básicos del análisis funcional, las ecuaciones diferenciales parciales (del tipo elíptico) y la teoría de operadores lineales.

Conceptos Básicos del Análisis Funcional

1.1. Espacios Métricos

Definición 1.1.1 (Espacio Métrico).- *Sea un conjunto* $X \neq \emptyset$*, una función* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *llamada distancia o métrica, tal que* $\forall\ x, y, z \in X$ *cumple las siguientes condiciones:*

(M1) $d \geq 0$.

(M2) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$. *(Simetría)*

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Desigualdad triangular)*

El par (X, d)*, es llamado* **espacio métrico** *en el conjunto* X.

Ejemplo 1.1.2 *Sea $X = \mathbb{R}$ y consideremos la función distancia $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Usando las propiedades de valor absoluto se prueba que d es una métrica sobre $\mathbb{R}$ denominada métrica usual; así el par (X, d) es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.3 *Sea $1 \leq p < \infty$ un número real fijo. Denotemos con ℓ_p como el* **conjunto de todas las sucesiones** $\{x_i\}$ *de números reales tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,$$

y la métrica definida por:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in \ell_p$

Usando la desigualdad de Hölder se prueba que d_p es una métrica sobre $\mathbb{R}^n$. Luego el par $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es un espacio métrico. (Ver [11])

En forma particular, tenemos:

($\diamondsuit$) Si $p = 1$ tenemos $d_1(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |x_i - y_i|$.

($\diamondsuit$) Si $p = 2$ tenemos $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i|)^2 \right)^{1/2}$.

($\diamondsuit$) Si $p = \infty$ se define $d_\infty(x, y) = \sup\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$.

Ejemplo 1.1.4 *Denotemos con $L^2[a, b]$ al* **conjunto de todas las funciones medibles** *f definido sobre $[a, b]$ tal que $|f|^2$ es tambien integrable sobre $[a, b]$. Entonces $L_2[a, b]$ es un espacio métrico con respecto a la métrica definida por:*

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \textit{donde} \quad f, g \in L^2[a, b]$$

Definición 1.1.5 (Sucesión convergente).- *Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión $\{x_n\} \subset X$* **converge** *a un punto $x \in X$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad d(x_n, x) < \varepsilon \quad ; \quad \forall n > k.$$

En este caso denotamos por: $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \quad$ ó $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Ejemplo 1.1.6 *Sea $X = \mathbb{R}$ y d la métrica usual de $\mathbb{R}$. Tomemos $0 < a < 1$ y consideremos la sucesión: $x_n = a^n$; esta sucesión es convergente y el valor del límite es 0.*

Definición 1.1.7 (Sucesión de Cauchy).- *Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesión de puntos en un espacio métrico (X, d). Se dice que $\{x_n\}$ es una* **sucesión de Cauchy** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $k = k(\varepsilon)$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para cada $m, n > k$.*
En éste caso denotaremos por: $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$

Propiedades

(1) Toda sucesión convergente es de Cauchy. (Ver [11])

(2) Toda sucesión de Cauchy es acotada. (Ver [11])

(3) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Si $\{x_n\}$ posee una subsucesión que converge a un punto $x_0 \in X$, entonces $\{x_n\}$ converge a x_0. (Ver [11])

Definición 1.1.8 (Espacio Métrico Completo).- *Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que (X, d) es un* **espacio métrico completo** *si cualquier sucesión $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión de Cauchy, y se tiene que $\{x_n\}$ converge en X*

Ejemplo 1.1.9 *Sea $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}, d_\infty)$, (ℓ_p, d_p) y $L^2[a, b]$ son espacios métricos completos.*

Ejemplo 1.1.10 *Consideremos $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \in \mathbb{Q}$. Se tiene, para $n > m$*

$$|x_n - x_m| = \frac{1}{(m+1)!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \longrightarrow 0$$

por ser el resto de la serie convergente $\sum\limits_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Además $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e \notin \mathbb{Q}$, por lo que $\mathbb{Q}$ no es completo.

1.2. Espacios de Banach

Consideremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$

Definición 1.2.1 *.- Sea X un espacio vectorial y $\mathbb{K}$ cuerpo. Se define una función $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que a cada $x \in X$, le hace corresponder un número $\|x\| \in \mathbb{R}$, el cual satisface los siguientes axiomas:*

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$, α *un escalar arbitrario.*

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$. *(desigualdad triangular)*

Así, la función $\| \cdot \|$ que satisface N1 a N4 se denomina **norma** ($\|x\|$ se lee: Norma de x). Un espacio vectorial con la norma $\| \cdot \|$ se denomina **espacio vectorial normado** o simplemente **espacio normado**, denotado por $(X, \| \cdot \|)$.

Observación 1.2.2 *En adelante $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, salvo mención contraria*

Observación 1.2.3 *Todo espacio normado $(X, \| \cdot \|)$, es un espacio métrico con respecto a la métrica dada por:*

$$d(x, y) = \|x - y\| \ ; \ \forall x, y \in X$$

Ésta métrica es llamado la **métrica inducida** *por la norma $\| \cdot \|$.*
Sin embargo, un espacio métrico no necesariamente es un espacio normado.

Observación 1.2.4 *Un espacio normado es un tipo especial de espacio métrico, por lo que los conceptos de sucesión de Cauchy, sucesión convergente, cerradura, completitud, compacidad; introducidos en un espacio métrico, serán validos en un espacio normado.*

Definición 1.2.5 (Espacio de Banach).- *Un espacio X normado y completo, (completo en la métrica definido por la norma), se denomina* **espacio Banach**.

Ejemplo 1.2.6 *El espacio Euclideano* $\mathbb{R}^n$ *es un espacio de Banach con la norma usual definida por:*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2\right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + ... + (\xi_n)^2}$$

donde $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

La métrica d, inducida por esta norma es

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2\right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + ... + (\xi_n - \eta_n)^2}$$

donde $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n$

1.2.1. Principio de Contracción de Banach

El principio de contracción de Banach, conocido también como el teorema de punto fijo de Banach, garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de cierto tipo de funciones de un espacio métrico completo. Éste teorema permite obtener un punto fijo mediante un método constructivo y procesos iterativos .

Definición 1.2.7 (Punto Fijo) .- *Sea* X *un espacio métrico y* f *una función definida en un conjunto* $I \subset X$, $f : I \longrightarrow I$. *Se dice que* $x^* \in I$ *es un punto fijo de* f *si y solo si* $f(x^*) = x^*$, *como se muestra en Figura 1*

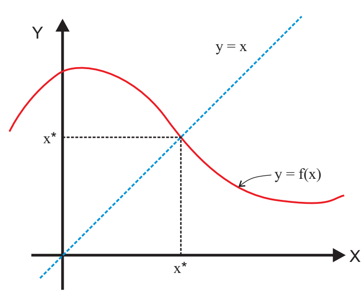

Figura 1

Ejemplo 1.2.8 *Sea la función* $f(x) = \sqrt{2x+3}$. *¿f posee puntos fijos en $\mathbb{R}$?*

i) Sabemos que f es definida si $2x + 3 \geq 0$, es decir: $Dom(f) = I = [-3/2, +\infty >$

ii) ahora veamos los puntos fijos.

Hacemos $f(x) = x \implies \sqrt{2x+3} = x$ y resolviendo tenemos: $x = 3 \vee x = -1$

Pero $x = -1$ no es solución, pues $\sqrt{2(-1)+3} \neq -1$

Luego $x = 3$ es la única solución y $f(3) = 3$

$\therefore f$ tiene un único punto fijo.

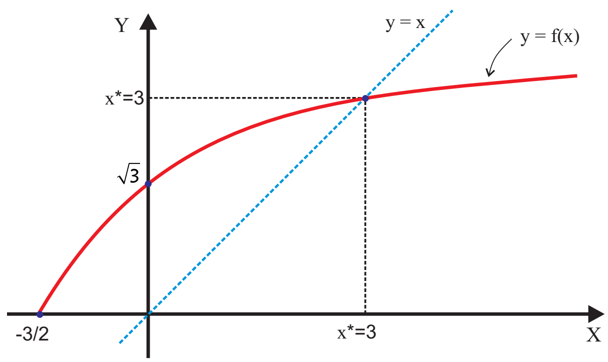

Figura 2

f tiene un único punto fijo.

Ejemplo 1.2.9 *La función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x + 1$ *no tiene puntos fijos en* $\mathbb{R}$.

Definición 1.2.10 (Contracción) .- *Sean* (X, d) *y* $(Y, \widetilde{d})$ *dos espacios métricos, y la función* $\phi : X \longrightarrow Y$. *Decimos que* ϕ *es una* **contracción** *si existe un número* λ, $0 \leq \lambda < 1$ *tal que*

$$\widetilde{d}(\ \phi(x), \phi(y)\ ) \leq \lambda\, d(x, y) \quad , \ \forall x, y \in X.$$

El número λ es llamado **factor de contractividad**.

Notemos que en el caso $\lambda = 0$, ϕ es una función constante.

Sean (X, d) y $(Y, \widetilde{d})$ espacios métricos, decimos que la función $f : X \longrightarrow Y$, es **función de Lipschitz** con constante L, si $\forall x, y \in X$,

$$\widetilde{d}(\ f(x), f(y)\ ) \leq L\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Una contracción es una función de Lipschitz con constante menor que 1.

Observación 1.2.11 *Toda contracción es uniformemente continua.*

Ejemplo 1.2.12 *Sea* $\phi(x) = \dfrac{1}{3}x$, $x \in [0,1]$. *Entonces* ϕ *es una función contracción sobre* $[0,1]$ *con factor de contractividad* $\lambda = \frac{1}{3}$.

Denotemos por f^k a la **composición**

$$f^k := \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f \circ f}_{k\, veces} \;\; , \; si\, k \in \mathbb{N} \quad , \quad f^0 := id_X \;\; ,$$

donde $id_X : X \longrightarrow X$ es la función identidad.

A continuación enunciamos el teorema de contracción de Banach, que establece que las contracciones en espacios completos no vacios tienen puntos fijos únicos.

Teorema 1.2.13 (Teorema de contracción de Banach) *"Sea* $X = (X, d)$ *un espacio métrico completo, no vacio. Si la función* $\phi : X \longrightarrow X$ *es una contracción, con factor de contractividad* λ*, entonces se cumple:"*

(i) ϕ *tiene un único punto fijo* $\widehat{x}$.

(ii) *Para cualquier* $x_0 \in X$ *la sucesión* $\{\phi^k(x_0)\} \subseteq X$ *converge a* $\widehat{x}$ *en* X*, y se cumple que*

$$d(\phi^k(x_0), \widehat{x}) \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} d(\phi(x_0), x_0) \tag{1.1}$$

Para cualquier $x_0 \in X$*, la sucesión* $x_0, \phi(x_0), \phi^2(x_0), ..., \phi^k(x_0)$ *converge al* $\widehat{x}$.

Demostración.- Ver [8] . $\square$

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto, conexo y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \ , \ \ \forall (t,x_i) \in U \ , \ i = 1,2$$

Asumamos que f es contínua y

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.2}$$

Si $(t_0, x_0) \in U$, una solución local de (1,2) pasando por (t_0, x_0) es una función contínuamente diferenciable ϕ definida en un intervalo I, tal que $t_0 \in \dot{I}$, con $\phi(t_0) = x_0$, $(t, \phi(t)) \in U$, $\forall t \in I$ y $\dot{\phi} = f(t, \phi(t))$, $\forall t \in I$

Ejemplo 1.2.14 (Teorema de Picard) *Si f es como se ha mencionado para cada $(t_0, x_0) \in U$, la ecuación diferencial (1,2) posee una unica solución local por (t_0, x_0).*

DEMOSTRACIÓN.- Observemos que $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es solución local pasando por (t_0, x_0) de (1,2) si y solo si ϕ es una función contínua definida en I, con $(t, \phi(t)) \in U$, $\forall t \in I$,

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \ , \ \forall t \in I$$

Sea $U' \subseteq U$ un abierto con $(t_0, x_0) \in U'$ tal que f es acotado en U', esto es

$$|f(t,x)| \leq M \ , \ \forall t \in U \, .$$

Sea $\alpha > 0$ tal que

- $R = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times B(x_0, \alpha M) \subseteq U'$
- $L\alpha < 1$

Sea también $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Definimos

$$\mathcal{B} = \{\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \ \psi \ \text{ contínua} \ , \ \psi(t_0) = x_0 \ \ y \ \ |\psi(t) - x_0| \leq M\alpha \ , \ \forall t \in J\}$$

Luego $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado de $C(J, \mathbb{R}^n)$, así $\mathcal{B}$ es un espacio métrico completo. Definimos la aplicación $T : \mathcal{B} \longrightarrow C(J, \mathbb{R}^n)$, mediante

$$(T\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \ , \ \forall t \in J, \psi \in \mathcal{B}$$

Probaremos que $T(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ y que T es una contracción.

Si $\psi \in \mathcal{B}$, entonces $T\psi$ es contínua, $(T\psi)(t_0) = x_0$ y

$$|(T\psi)(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \right| \leq M\,|t - t_0| \leq M\alpha \ , \ \forall t \in J$$

así $T(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$. Además si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ se tiene , $\forall t \in J$

$$\begin{aligned} |(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi_1(s)) - f(s,\phi_2(s))|\, ds \\ &\leq L\int_{t_0}^{t} |\phi_1(s) - \phi_2(s)|\, ds \\ &\leq L\,|\psi_1 - \psi_2|_\infty \end{aligned}$$

Luego, tomando el supremo

$$|T\psi_1 - T\psi_2|_\infty \leq L\alpha\,|\psi_1 - \psi_2|$$

Por lo que T es una contracción.

Por tanto T tiene un único punto fijo, y así (1,2) tiene una única solución para (t_0, x_0).

□

El Teorema 1.2.13 no sólo afirma la existencia de un único punto fijo para una contracción $\phi : X \longrightarrow X$. También nos dice cómo encontrar una buena aproximación de él. Para ello, bastará tomar un punto arbitrario $x_0 \in X$ y considerar la sucesión de iteradas $\{\phi^k(x_0)\}$; La cuál converge al punto fijo.

La desigualdad (1.1) nos brinda una estimación del error en cada paso de la iteración. A éste método se le conoce como el método de aproximaciones sucesivas.

1.2.2. Operadores en Espacios de Banach

En el cálculo diferencial consideramos la recta real $\mathbb{R}$ y funciones reales sobre $\mathbb{R}$ (o sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$). Es decir, cualquier función es una aplicación de su dominio sobre $\mathbb{R}$. En análisis funcional se consideran espacios más generales tal como espacios métricos y espacios normados, y aplicaciones de estos espacios.

Operadores Acotados

Definición 1.2.15 .- *Sea X e Y dos espacios normados, se dice que:*

(1) *Una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ es llamado un* **operador** *o una transformación. El valor de T en $x \in X$ es denotado por $T(x)$ o simplemente Tx.*

(2) *T es un* **operador lineal** *o transformación lineal si satisface las siguientes condiciones:*

(a) $T(x + y) = Tx + Ty$, $\forall x, y \in X$

(b) $T(\alpha x) = \alpha Tx$, $\forall x \in X$, $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$

(3) *El operador lineal T es* **acotado** *si existe una constante $k > 0$ tal que* $\|Tx\| \leq k\|x\|$, $\forall x \in X$; $k \in \mathbb{R}$.

(4) *T es* **continuo** *en un punto $x_0 \in X$, si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiendo de ε y x_0 tal que $\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$ cuando $\|x - x_0\| \leq \delta$.*
T es **continuo sobre** *X si es continuo en todo punto de X.*

(5) *T es* **uniformemente continuo** *si para $\varepsilon > 0$ y para cada $x, x_0 \in X$ existe un $\delta > 0$, independiente de x_0 tal que: $\|x - x_0\| < \delta$ tenemos $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$.*

(6) $\|T\| = sup\left\{ \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \;/\; x \neq 0 \right\}$ *es la* **norma del operador lineal acotado** *T.*

(7) *Si $Y = \mathbb{R}$, el espacio normado de los números reales, entonces T es llamado* **funcional**.

(8) *Para el operador T, el conjunto $R(T) = \{T(x) \in Y / x \in X\}$ es denominado* **rango** *de T, y el conjunto $N(T) = \{x \in X / T(x) = 0\}$ es denominado* **núcleo** *de T.*

Ejemplo 1.2.16 .

(a) *Sea X un espacio normado bajo la norma $\|\cdot\|$. Entonces una aplicación T, definido sobre X en la siguiente forma: $Tx = \|x\|$ no es un operador no lineal, pues, por ejemplo, para $X = \mathbb{R}$.*

$T(-1 + 2) = T(1) = \|1\| = 1$, *pero* $T(-1) + T(2) = \|-1\| + \|2\| = 3$,

y así $T(-1 + 2) \neq T(-1) + T(2)$.

(b) *Si consideramos* $X = C[0,1]$ *con norma del supremo, entonces*
$(Tf)(t) = \displaystyle\int_0^1 f(s)ds$ *es un operador lineal.*

Ejemplo 1.2.17 *Sea* $P_n([0,1]) = \left\{ p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} / p(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i t^i \ , \ a_i \in \mathbb{R} \ , \ 0 \leq k \leq n \right\}$ *definido como:*

$$\begin{aligned} T: \quad P_n([0,1]) &\longrightarrow P_n([0,1]) \\ p \quad &\longmapsto Tp : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad t \longmapsto (Tp)(t) = \frac{d}{dt}p(t) \end{aligned}$$

$$Tp(t) = \frac{d}{dt}p(t)$$

$P_n[0,1]$ *denota el espacio de todos los polinomios en* $[0,1]$ *de grado menor o igual que* n *el cual es un espacio normado finito-dimensional.*
T *es un operador lineal en* $P_n[0,1]$ *sobre si mismo como la siguiente buena relación por la propiedad bien conocido de la derivada:*
$T(p_1 + p_2) = Tp_1 + Tp_2$ *y* $T(\alpha p_1) = \alpha T p_1 \ , \ p_1, p_2 \in P_n[0,1] \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$. *Tenemos:*

$$Tx^n = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Así, $\|x^n\| = 1$ *pero* $\|Tx^n\| = n$. *En vista de esto,* T *no es acotado.*

Teorema 1.2.18 (Normas Equivalentes) *Para un operador lineal acotado* T *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\|T\| = \sup \left\{ \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \ / \ x \neq 0 \right\}$ *ó* $\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0} \left\{ \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \ / \ x \neq 0 \right\}$

(ii) $\|T\| = \inf \{ k \ / \ \|Tx\| \leq k\|x\| \}$.

(iii) $\|T\| = \sup \{ \|Tx\| \ / \ \|x\| \leq 1 \}$.

Demostración.- Ver [9] . $\square$

Teorema 1.2.19 *El conjunto* $\mathcal{L}(X, Y)$ *de todos los operadores lineales acotados en un espacio normado* X *sobre un espacio normado* Y*; es un espacio normado. Si* Y *es un espacio de Banach, entonces* $\mathcal{L}(X, Y)$ *es tambien un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [9] . □

Observación 1.2.20 *En el teorema anterior, si tomamos Y como el espacio de Banach de números reales, entonces obtenemos el siguiente resultado.* **El conjunto de todas las funcionales lineales acotados sobre un espacio normado X es un espacio de Banach**, *que usualmente es denotado por X^* o X' y es llamado el* **espacio dual de X.**
Con X^{**} denotamos el espacio de funcionales lineales acotados de X^* y es llamado el **segundo espacio dual** *de X.*

Ejemplo 1.2.21 *Sea $X = L^2([0,1])$ y el funcional F sobre X definida por*

$$F(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad , \quad \forall f \in L_2([0,1])$$

y g es una función dada en $L^2([0,1])$.
F es lineal y acotado, y por tanto es un elemento de ($L^2([0,1])$)*.

Definición 1.2.22 .- *Con $\mathcal{L}(X)$ denotamos el conjunto de* **todos operadores lineales acotados** *en un espacio normado X sobre si mismo, y $S, T \in \mathcal{L}(X)$, la composición en $\mathcal{L}(X)$ es definida como sigue:*

$$(S.T)(x) = S(T(x)), \forall x \in X.$$

Sea $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$. Si T es inyectivo, existe un operador

$$\begin{aligned} T^{-1}: \quad R(T) &\longrightarrow D(T) \\ y \quad &\longmapsto T^{-1}y = x \end{aligned}$$

tal que $Tx = y$. El operador T^{-1} es llamado **operador inverso** *de T.*
Donde R(T) : rango de T.

Teorema 1.2.23 *Sea T un operador acotado inferiormente desde un espacio normado X en un espacio normado Y. Entonces T posee un inverso continuo T^{-1} desde su rango $R(T)$ en X. Inversamente, si existe un inverso continuo $T^{-1} : R(T) \longrightarrow X$, entonces existe una constante positiva M tal que*

$$\|Tx\|_Y \geq M\|x\|_X \quad , \forall x \in X$$

Demostración.- Ver [9] . $\square$

Teorema 1.2.24 *Si X es un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|T\| < 1$, entonces existe $(I - T)^{-1}$. (I: operador identidad).*

Demostración.- Ver [9] . $\square$

1.2.3. Operador Lineal Compacto en Espacios Normados

Definición 1.2.25 (Operador lineal compacto).- *Sea X e Y espacios normados. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es denominado* **operador lineal compacto** *(operador lineal completamente continuo) si T es lineal y si para cada subcojunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es relativamente compacto, es decir, la cerradura $\overline{T(M)}$ es compacto.*

Lema 1.1 (Continuidad) *Sea X e Y espacios normados. Entonces:*

(a) Todo operador lineal compacto $T : X \longrightarrow Y$ es acotado, por tanto continuo.

(b) Si $dimX = \infty$, el operador identidad $I : X \longrightarrow X$ (el cual es continuo) no es compacto.

Demostración.- Ver [11] . $\square$

Teorema 1.2.26 . (Criterio de compacidad) *Sea X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es compacto si y solo si aplica cada subsucesión acotado (x_n) en X sobre una subsucesión (Tx_n) en Y el cual tiene una subsucesión convergente.*

Demostración.- Ver [11] . $\square$

Teorema 1.2.27 . (Dominio o rango de dimenciones finitas) *Sea X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces*

(a) Si T es acotado y $dimT(X) < \infty$, entonces el operador T es compacto.

(b) Si $dimX < \infty$, ntonces el operador T es compacto.

Demostración.- Ver [11] . $\square$

Teorema 1.2.28 . (Sucesión de operadores lineales compactos) *Sea* (Tx_n) *una subsucesión lineal de operadores compactos sobre un espacio normado* X *dentro de un espacio de Banach* Y. *Si* (Tx_n) *es un operador uniformemente convergente, es decir,*
$\|Tn - T\| \longrightarrow 0$, *entonces el operador limite* T *es compacto.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [11] . □

1.3. Espacios de Hilbert

Definición 1.3.1 (Producto Interno).- *Sea* H *un espacio vectorial y un cuerpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. *Se define una función* $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$, *tal que a cada par ordenado de vectores* $(x, y) \in H \times H$, *le asigna un escalar* $\langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ *que cumple las siguientes propiedades:*

(P1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$; $\forall x, y, z \in H$

(P2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$; $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in H$

(P3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$; $\forall x, y \in H$ *(conjugación compleja)*

(P4) $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\forall x \in H \quad \wedge \quad \langle x, x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

La función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que satisface (P1) - (P4) será denominado, **producto interno** en H, y el par $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es llamado **espacio con producto interno** o **espacio pre-Hilbert**.

Observación 1.3.2 :

(1) *Las condiciones* **(P1) y (P2)** *implica que la función* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es lineal en la primera variable* x, *y que*

(*a*) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$; $\forall x, y, z \in H$

(*b*) $\langle x, \beta y\rangle = \overline{\beta}\langle x, y\rangle$; $\forall x, y \in H$

(2) $\langle x, 0\rangle = 0,\ \forall x \in H$

(3) *Si, para un elemento dado* $y \in H$, $\langle x, y\rangle = 0\ \forall x \in H$ *entonces* $y = 0$

(4) *Usando* **P(1), P(2)** *;* **(1a) y (1b)**, *se prueba que:*

$$\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, x_k \ , \ \sum_{l=1}^{n} \beta_l \, y_l \rangle = \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \, \overline{\beta_l} \langle x_k, y_l \rangle$$

(5.) *El producto interno es una función continua con respecto a la norma inducida.*

Teorema 1.3.3 . (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) *Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno H, entonces para todo $x, y \in H$:*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Demostración.- Ver [9] . □

Teorema 1.3.4 . *Todo espacio con producto interno H es un espacio normado con respecto a la norma:*

$$\|x\| = |\langle \, x, x \rangle|^{1/2} \ ; \ \forall x \in H$$

Demostración.- Ver [9] . □

La norma $\|x\| = |\langle \, x, x \rangle|^{1/2}$; $x \in H$ es denominado la norma inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 1.3.5 (Espacio de Hilbert).- *Un espacio con producto interno H es llamado un* **espacio de Hilbert** *si el espacio normado inducido por el producto interno es un espacio de Banach (espacio normado y completo).*

Ejemplo 1.3.6 $\mathbb{R}^n$ *, ℓ_2 y $L^2[a, b]$ son espacios de Hilbert.*

Teorema 1.3.7 . (Ley del paralelogramo) *Para dos elementos cualquiera x e y pertenecientes a un espacio con producto interno, tenemos:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ \textit{donde} \ x, y \in H$$

Es decir, una condición necesaria y suficiente para que la norma de un espacio normado H sea obtenida a partir de algún producto interno, es que ella verifique la ley del paralelogramo.
Demostración.- Ver [9] . □

Teorema 1.3.8 . (Jordan-Von-Neumann) *Un espacio normado es un espacio con producto interno si y sólo si la norma inducida satisface la ley del paralelogramo.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [9] . $\square$

Ejemplo 1.3.9 $C[a,b]$ *no es un espacio con producto interno, por lo que no es de Hilbert.*

Ejemplo 1.3.10 *La norma definida por*

$$| f | = \max_{x\in[a,b]} | f(t) |$$

no puede ser obtenida de un producto interno, ya que esta norma no satisface la ley del paralelogramo:

$$| f+g |^2 + | f-g |^2 = 2 | f |^2 + | g |^2$$

Basta tomar $f(t) = 1$ *y* $g(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$

Ejemplo 1.3.11 *El espacio* ℓ_p *(ver ejemplo 1.1.3) es un espacio de Banach si* $p \geq 1$*, y es un espacio de Hilbert solamente si* $p = 2$ *.*

1.3.1. Reflexividad de los Espacios de Hilbert

Un espacio de Banach X es llamado un espacio de Bancah reflexivo si ello puede ser identificado con su segundo dual $(X^*)^* = X^{**}$.
Esto significa que un espacio de Banach X es reflexivo si existe una aplicación de X sobre X^{**} el cual es lineal, preservando la norma, 1-1 y sobre.
Una aplicación $J : X \longrightarrow X^{**}$ definido por $J(x) = F_x$, donde $F_x(f) = f(x)\ \forall f \in X^*$ es llamada **la inmersión natural**.

Teorema 1.3.12 . *Todo espacio de Hilbert* H *es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [9] . $\square$

1.3.2. Operadores en Espacios de Hilbert

En esta parte enunciaremos los operadores sobre espacios de Hilbert, centrando nuestra atención en un tipo especial de operadores, llamados **hermitianos**.

Definición 1.3.13 (Operador Adjunto).- *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal acotado. El operador $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \;\; ; \;\; \forall x \in H_1 \; , \; y \in H_2$$

es llamado el **operador adjunto** *(Es decir: T^** **operador adjunto** *de T).*

Lema 1.2 . *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal acotado. Entonces existe el operador lineal $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ dado en la difinición 1.3.13. Este operador es único, acotado y además $\| T^* \| = \| T \|$.*

Demostración.- Ver [4] . □

Teorema 1.3.14 . *Sean $S, T : H_1 \longrightarrow H_2$ dos operadores lineales acotados. Entonces*

(1) *$I^* = I$ donde I es el operador identidad.*

(2) $(T + S)^* = T^* + S^*$.

(3) $(\alpha\ T)^* = \overline{\alpha}\ T^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

(4) $(TS)^* = S^*T^*$. *(con $H_1 = H_2$)*

(5) $T^{**} = T$.

(6) $\|T^*\| = \|T\|$.

(7) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

(8) *Si T es inversible, entonces T^* también lo es. Y ademas $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Demostración.- Ver [9] . □

Definición 1.3.15 (Operador autoadjunto).- *Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \longrightarrow H$ es un operador lineal acotado. Entonces T es llamado* **autoadjunto** *si $T = T^*$.*

Definición 1.3.16 (Autovalor y Autovector de un operador).- *Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \longrightarrow H$ un operador, tal que $T(x) = \lambda\, x$, siendo $\lambda \in \mathbb{K}$ y un vector no cero x; entonces*

(1) *λ es es llamado* **autovalor** *de T.*

(2) *x es llamado* **autovector** *correspondiente a λ*

(3) *$\{x \in H : T(x) = \lambda x\}$ es llamado* **autoespacio** *del autovalor λ.*

Teorema 1.3.17 . *Los valores propios de un operador autoadjunto son números reales. Dos vectores propios correspondientes a dos valores propios diferentes de un operador autoadjunto son ortogonales.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [9] . □

Teorema 1.3.18 . *Los valores propios de un operador unitario son números complejos λ tal que $\|\lambda\| = 1$.*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [9] . □

1.3.3. Espectro de un Operador

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \longrightarrow X$ operador lineal y continuo, es decir $T \in \mathcal{L}(X)$.

Definición 1.3.19 (Espectro).- *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Un valor $\lambda \in \mathbb{K}$ se dice* **valor propio** *del operador T, si existe $x \neq 0 \in X$ tal que $T(x) = \lambda\, x$, es decir $Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.*
Los elementos no nulos del $Ker(T - \lambda I)$ son denominados **vectores propios** *de T, asociado a λ.*

El conjunto de valores propios del operador definido por:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : Ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

será denominado **espectro puntual** *del operador.*

Observemos que si $\lambda \in \sigma_p(T)$ implica que $(T - \lambda I)$ no es inyectiva, en particular no es invertible.
Se sabe que si $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es lineal e inyectiva, esto equivale a la suryectividad e equivale a ser invertible (con inversa continua). Esta condición puede caracterizarse en términos del $det(A) \neq 0$ siendo A la matriz del operador. Por consiguiente el conjunto de valores propios $\sigma_p(T)$ coincide con las soluciones de $det(A - \lambda I) = 0$. Dicho de otro modo, las raices del polinomio característico.

Definición 1.3.20 (Conjunto Resolvente).- *Sea $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal (no necesariamente acotado). Un valor $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama* **valor regular** *(o valor resolvente) para T si $(T - \lambda I)$ es inversible en $\mathcal{L}(X)$. El conjunto de los valores regulares, denotado por:*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

se llama el **conjunto resolvente** *del operador T y $\sigma(T) = \mathbb{K} \backslash \rho(T)$ es el* **espectro del operador**. *Es decir:*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \nexists \ (T - \lambda I)^{-1} \ \}$$

es el **conjunto de los valores no regulares** *(llamados también valores espectrales)*
Definimos el **operador resolvente de** T, *denotado por R_T mediante la aplicación:*

$$R_T : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(X) \ \text{dada por} : R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$$

Observación 1.3.21 *Notar que: $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ (Ver [5].)*

Proposición 1.3.22 *Si $dimH < \infty$ entonces $\sigma(T)$ es el conjunto de los autovalores de T y está formada por las raíces de $det(T - \lambda I)$.*

Demostración.- Ver [5] . □

Observación 1.3.23 *Si la dimensión de H es infinita, puede ocurrir que $\lambda \in \sigma(T)$ y sin embargo λ no sea autovalor de T.*

Ejemplo 1.3.24 *Sea $T : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$ dado por: $T(\{x_0, x_1, x_2, ...\}) = \{x_0, x_1/2, x_2/3, ...\}$*
Tenemos que T es inyectivo, por lo tanto $N(T) = 0$, así que 0 no es autovalor de T.
Por otro lado $\|T(e_n)\| = 1/n$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0$$

Pero como $\|e_n\| = 1$ resulta que T no es invertible, de donde $0 \in \sigma(T)$. (Ver [5].)

Teorema 1.3.25 : *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ entoces $\sigma(T)$ es un conjunto compacto contenido en:* $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$.

Demostración.- Ver [6] . □

Definición 1.3.26 .- *Si $T \in \mathcal{L}(X)$, se define el* **radio espectral** *de T por:*

$$r(T) = \max_{\lambda\in\sigma(T)} \mid \lambda \mid.$$

Teorema 1.3.27 (Fórmula de Gelfand) *Si $T \in \mathcal{L}(X)$ entonces*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \| T^n \|^{1/n}$$

Demostración.- Ver [5] . □

Seguidamente, extenderemos la definición de operador adjunto para operadores no acotados.

Definición 1.3.28 (Operador autoadjunto para operadores no acotados).- *Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow Y$ un operador lineal no acotado, con dominio denso en H. Denotamos*

$$D(A^*) = \{ \ v \in H : \exists v^* \in H \ \ tal\ que \ \ \langle Au, v\rangle = \langle u, v^*\rangle \ \ , \ \ \forall u \in D(A) \ \}$$

Definimos el operador $A^* : D(A^*) \subseteq H \longrightarrow H$ tal que

$$A^*v = v^* \quad , \quad (v^* \text{es único})$$

Las siguientes propiedades se verifican:

(i) $(\alpha\ A)^* = \overline{\alpha}\ A^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$, $\forall u \in D(A)$, $\forall v \in D(A^*)$.

(iii) *A^* es un operador cerrado.*

(iv) *Si existen A^*, A^{-1} y $(A^{-1})^*$ entonces existe $(A^*)^{-1}$ y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

1.4. La derivada de Gâteaux y de Fréchet.

1.4.1. La derivada de Gâteaux

En esta sección, X e Y denotan espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$, y T es un operador de X en Y $(T : X \longrightarrow Y)$

Definición 1.4.1 (Derivada de Gâteaux).- *Sean x y t elementos de X y*

$$\lim_{\eta\to 0}\left\|\frac{T(x+\eta t)-T(x)}{\eta} - DT(x)t\right\| = 0$$

para cada $t \in X$, donde $\eta \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$.

$DT(x)t \in Y$ es llamado el **valor de la derivada de Gâteaux** de T en x, en la dirección t, y T será denominado **Gâteaux diferenciable** en x en la dirección de t. Así, la derivada de Gâteaux de T es un operador frecuentemente denotado por: $DT(x)$.

Observación 1.4.2 :

(a) *Si T es un operador lineal, entonces $DT(x)t = T(t)$, es decir, $DT(x) = T$; $\forall x \in X$*

(b) *Si $T = F$ es una funcional de valor real sobre X; es decir, $T : X \to \mathbb{R}$, y F es Gâteaux diferenciable en algun $x \in X$. Entonces*

$$DT(x) = \left[\frac{d}{d\eta}F(x+\eta t)\right]_{\eta=0}$$

y, para cada $x \in X$ fijado, $DF(x)t$ es una funcional lineal de $t \in X$

(c) *Podemos notar que la derivada de Gâteaux es una generalización de la idea de la derivada direccional bien conocido en dimensión finita.*

Teorema 1.4.3 *La derivada de Gâteaux de un operador T es único siempre que exista*

DEMOSTRACIÓN.- Ver [9] . □

Definición 1.4.4 (Gradiente de un funcional).- *Sea F un funcional sobre X. La aplicación $x \to DF(x)$ es llamado* **la gradiente** *de F y es usualmente denotado por ∇F.*

Podemos observar que el gradiente ∇ es una aplicación de X en el espacio dual X^* de X.

Teorema 1.4.5 (Teorema de Valor Medio) *Supongamos que el funcional F posee derivada de Gâteaux $DF(x)t$ en cada punto $x \in X$. Entonces para cada punto $x, x+t \in X$, existe un $\varepsilon \in (0,1)$ tal que*

$$F(x+t) - F(x) = DF(x + \varepsilon t)t$$

DEMOSTRACIÓN.- Ver [9]. □

1.4.2. La derivada de Fréchet.

Definición 1.4.6 (Derivada de Fréchet).- *Sea x un punto dado en un espacio de Banach X e Y otro espacio de Banach. Un operador lineal continuo $S : X \to Y$ es llamado la* **derivada de Fréchet** *del operador $T : X \to Y$ en x si*

$$T(x+t) - T(x) = S(t) + \varphi(x,t), \tag{1.3}$$

y

$$\lim_{\|t\| \to 0} \frac{\|\varphi(x,t)\|}{\|t\|} = 0 \ ,$$

o equivalentemente

$$\lim_{\|t\| \to 0} \frac{\|T(x+t) - T(x) - S(t)\|}{\|t\|} = 0 \tag{1.4}$$

La derivada de Fréchet de T en x es usualmente denotado por $dT(x)$ o $T'(x)$. Se dice que T es **Fréchet diferenciable** sobre su dominio, si $T'(x)$ existe en cada punto x de su dominio.

Observación 1.4.7 :

(a) *Si $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, entonces la derivada clasica $f'(x)$ de una función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en x definido por*

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

es un número que representa la pendiente de la grafica de la función f en x. La derivada de Fréchet de f no es un número, pero es un operador lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. La existencia de la derivada clasica $f'(x)$ implica la existencia de la derivada de Fréchet en x y por comparación dela ecuación (1,3) *y* (1,4) *escrita en la forma*

$$f(x+t) - fT(x) = f'(x)t + tg(t),$$

encontramos que S es el operador el cual multiplica cada t por el número $f'(x)$.

(b) *En cálculo elemental, la derivada en el punto x es una aproximación lineal local de la función dada en la vecindad de x. Similarmente, la derivada de Fréchet puede ser interpretado como la mejor aproximación lineal local. Consideremos el cambio en T cuando cambia sus argumentos desde x a $x+t$, y entonces aproximar este cambio por un operador lineal S para que*

$$T(x+t) = T(x) + S(t) + E,$$

donde E es el error en la aproxiamción lineal.
Así, E tiene el mismo orden de magnitud que t excepto cuando S es igual a la derivada de Fréchet de T. $E = 0(t)$, para que E sea muchos más pequeño que t como $t \to 0$. En esta vía, la derivada de Fréchet da la mejor aproximación lineal de T cerca de x.

(c) *Está claro de la definición que si T es lineal, entonces*

$$dT(x) = T(x),$$

es decir, si T es un operador lineal, entonces la derivada de Fréchet (imitación de aproximación lineal) de T es T mismo.

Teorema 1.4.8 *Si un operador posee la derivada de Fréchet en un punto, entonces posee derivada de Gâteaux en ese punto y ambas derivadas coinciden.*

Demostración.- Ver [9] . $\square$

En vista del teorema (1.4.3), la derivada de Gâteaux es única y por tanto la derivada de Fréchet también es única. Observe que la reciproca del Teorema 1.4.8 no es verdad, en general.

Teorema 1.4.9 *Sea Ω un subconjunto abierto de X y $T : \Omega \longrightarrow Y$ tiene la derivada Fréchet en un punto arbitrario* $\mathbf{a}$ *de Ω. Entonces T es continua en* $\mathbf{a}$.

Demostración.- Ver [9] . $\square$

Lema 1.3 *Suponga que X, Y son espacio normado, tal que U es un subconjunto abierto de X, y que $x_0 \in U$. Una función $f : U \longrightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en x_0 si y solo si existe alguna función $F : U \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ que es continuo en x_0 y para lo cual*

$$f(x) - f(x_0) = F(x)(x - x_0) \quad , \quad x \in U \ .$$

Demostración.- Ver [17]. $\square$

Definición 1.4.10 (Continuidad Lipschitz) .- *Sea $\Omega \subset X$, T desde Ω sobre Y. Diremos que T es* **Lipschitz** *(con modulo $\alpha \geq 0$) sobre Ω, si*

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \ \ \forall x_1, x_2 \in \Omega \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

T es llamado **Lipschitz cerca** de x (con modulo α) si, para algún $\epsilon > 0$, T es Lipschitz con modulo α en una vecindad de x, $S_\epsilon(x)$. Si T es Lipschitz cerca de $x \in \Omega$, diremos que T es **Localmente Lipschitz** sobre Ω. α es llamado **Exponente Lipschitz**.

Definición 1.4.11 (Operador Monótono) .- *Sea $T : X \longrightarrow X^*$, (lineal o no) entonces T es llamado* **monotona** *si*

$$(Tu - Tv, u - v) \geq 0 \ , \quad \forall \ u, v \in X$$

NOTA : $(\cdot, \cdot)$ denota la dualidad entre X y X^*; es decir, también el valor de $Tu - Tv$ en $u - v$. En la configuración del espacio de Hilbert, $(\cdot, \cdot)$ llega a ser un producto interno. En esta parte, usaremos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ también para la dualidad.

T es llamado **estrictamente monótona** si

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle > 0 \ ; \quad \forall \ u, v \in X \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

T es llamado **fuertemente monótona** si existe una constante $k > 0$ tal que

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq k \left\| u - v \right\|^2 \ ; \quad \forall \ u, v \in X$$

1.5. Algunos Resultados de la Teoría Espectral

Definición 1.5.1 (Forma Sesquilineal).- *Sea V un espacio de Hilbert y $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. La aplicación $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama una forma sesquilineal continua, si cumple:*

(i) *Es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda variable. Es decir, sean $u, v, w \ \in V$ además $\alpha, \beta, \in \mathbb{C}$ con $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{C}$ sus respectivos conjugados, se cumple:*

1. *Es lineal* $\Longleftrightarrow \quad a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \, a(u, w) + \beta \, a(v, w).$
2. *Es antilineal* $\Longleftrightarrow \quad a(u, \alpha v + \beta w) = \bar{\alpha} \, a(u, v) + \bar{\beta} \, a(u, w).$

(ii) *Es Continua, si $\exists \, C > 0$ tal que: $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V$*

Definición 1.5.2 (Aplicación Hermitiana).- *La aplicación sesquilineal $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, será hermitiana si:*

$$a(v, w) = \overline{a(v, w)}, \ \forall u, v \in V.$$

Muchos problemas de ecuaciones diferenciales parciales pueden ser reformulados en una forma abstracta, usando operadores en espacios de Hilbert. En esta sección presentaremos el Teorema Espectral, fundamental para la elección de bases convenientes para la construcción de las soluciones aproximadas. Para enunciar el Teorema Espectral, consideremos dos espacios de Hilbert, V y H tales que $V \hookrightarrow H$ y V denso en H, y una forma sesquilineal continua en $V \times V$.

Denotaremos por $\mathfrak{D}(A)$ al conjunto de los $u \in V$ tal que la forma antilineal $v \mapsto a(u,v)$ es continua en V con la topología inducida por H. Como $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$, podemos prolongar esta forma antilineal a todo H, por tanto, para cada $u \in \mathfrak{D}(A)$, $\exists!\ A_u \in H$ tal que $a(u,v) = (A_u, v)$, $\forall v \in V$.

Por lo que queda definido un operador $A : D(A) \subseteq V \longrightarrow H\ /\ Au = A_u$ con

$$\mathfrak{D}(A) = \{u \in V;\ \exists! f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H,\ \forall v \in V\}$$

Con estas características tenemos que $\mathfrak{D}(A)$ es un subespacio lineal de H y que, $A : \mathfrak{D}(A) \subset V \longrightarrow H$, definido antes, es un operador lineal de H. En este caso, diremos que A es un operador definido por la terna: $\{V, H, a(u,v)\}$.

Teorema 1.5.3 (Espectral) *Sea V y H dos espacios de Hilbert, tales que $V \hookrightarrow H$ con inmersión compacta en V y denso en H. Supongamos que $a(u,v)$, es una forma sesquilineal continua en $V \times V$ con $a(u,v)$ hermitiana.*
Sea A un operador definido por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$. Entonces:

(i) *A es autoadjunto y existe un sistema numerable, ortonormal y completo $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H constituido por autovectores de A, que además, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es completo en V.*

(ii) *Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los autovalores de A correspondientes a los $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces:*
$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2, ..., \leq \lambda_n \leq ...\quad ;\ y\ \ \lambda_n \to \infty.$

(iii) *El dominio de A es dado por:*

$$\mathfrak{D}(A) = \left\{ u \in H\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |(u, w_n)_H|^2 < \infty \right\}$$

(iv) *Se tiene:*

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, w_n)_H w_n, \qquad \forall u \in \mathfrak{D}(A).$$

Demostración.- Ver [15] . $\square$

El operador de Laplace $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ es un operador diferencial de orden 2 formalmente autoadjunto. La teoria espectral para operadores no acotados en un espacio de

Hilbert nos muestra que el operador $(-\Delta)$ es definido por la terna $\{H_0^1, L^2(\Omega), ((\cdot,\cdot))\}$ y su dominio está caracterizado por $\mathfrak{D}(-\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, esto es:

$$\begin{array}{rlcl} -\Delta : & H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \ \subset L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & u & \mapsto & -\Delta u \end{array}$$

es un operador autoadjunto no acotado en $L^2(\Omega)$. Además, el teorema espectral muestra que existe una sucesión $(w_n)n \in \mathbb{N}$ de autovectores del operador $(-\Delta)$, con sus respectivos autovalores (λ_n) ; $n \in \mathbb{N}$, esto es:

$$-\Delta w_n = \lambda_n w_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos el sistema $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como la base de $L^2(\Omega)$ constituida por los vectores propios o autovectores del operador $(-\Delta)$. Así podemos verificar que, además de las propiedades anteriores, tenemos:

$$((u, w_n)) = \lambda_n (u, w_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}\, y\, \forall u \in H_0^1(\Omega);$$

$$(((u, w_n))) = \lambda_n ((u, w_n)) = \lambda_n^2 (u, w_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}\, y\, \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

donde

$$\|w_n\| = \sqrt{\lambda_n} \quad \text{y} \quad |||w_n||| = \lambda_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto

$$\left(\frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es un sistema ortonormal y completo de } H_0^1(\Omega);$$

y

$$\left(\frac{w_n}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es un sistema ortonormal y completo de } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Definición 1.5.4 (Operador Monótono) .- *Un operador lineal no acotado $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$, es* **monótono** *si*

$$\langle Av, v\rangle \geq 0 \quad , \quad \forall\, v \in D(A)$$

A es llamado máximal monótono si además $R(I + A) = H$. Es decir, si:

(i) *A es monótono*

(ii) $\forall f \in H, \exists u \in D(A)$ *tal que* $u + Au = f$

Proposición 1.5.5 .

Sea A *un operador máximal monótono. Entonces*

(a) $D(A)$ *es denso en* H.

(b) A *es un operador cerrado.*

(c) $\forall \lambda > 0$, $I + \lambda A : D(A) \longrightarrow H$ *es biyectivo,* $(I + \lambda A)^{-1}$ *es un operador acotado y* $|(I + \lambda A)^{-1}|_{\mathscr{L}(H)} \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN.- [3] .

Definición 1.5.6 (Forma bilineal acotado y coercivo).- *Una forma bilineal* $a(\cdot,\cdot)$ *en un espacio lineal normado* H *es denominado* **acotado** *(o* **continuo***) si* $\exists C < \infty$ *tal que*

$$|a(v,w)| \leq C \|v\|_H \|w\|_H \quad , \quad \forall\ v,w \in H$$

y **coercivo** *sobre* $V \subset H$ *si* $\exists \alpha > 0$ *tal que*

$$|a(v,w)| \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad , \quad \forall\ v \in H$$

Proposición 1.5.7 (Lax Milgran)

Dado un espacio de Hilbert $(V, (\cdot,\cdot))$*, contínua, la forma bilineal* $a(\cdot,\cdot)$ *coercivo y el funcional lineal contínua* $F \in V'$*, entonces existe un único* $u \in V$ *tal que*

$$a(u,v) = F(v) \quad , \quad \forall\ v \in V$$

DEMOSTRACIÓN.-

Para cualquier $v \in V$, se define una funcional Au por $Au(v) = a(u,v)$, $\forall\ v \in V$.

Au es lineal puesto que

$$\begin{aligned} Au(\alpha v_1 + \beta v_2) &= a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) \\ &= \alpha a(u,v_1) + \beta a(u,v_2) \\ &= \alpha Au(v_1) + \beta Au(v_2) \quad , \quad \forall\ v_1, v_2 \in V \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Au es también contínuo, puesto que, para todo $v \in V$,

$$|Au(v)| = |a\,(\,u, v\,)| \leq C\,\|u\|\,\|v\|\,,$$

donde C es la constante según la definición de continuidad para $a\,(\,\cdot\,,\cdot\,)$. por consiguiente,

$$\|Au\|_{V\,'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|} \leq C\,\|u\| < \infty.$$

Así, $Au \in V\,'$. Similarmente, se puede mostrar que la aplicación $u \longrightarrow Au$ es una aplicación lineal $V \longrightarrow V\,'$. Tambien mostraremos que la aplicación lineal $A : V \longrightarrow V\,'$ es continua con $\|A\|_{L(V,V\,')} \leq C$.

Ahora, por el teorema de la representación de Riesz (Ver [3]), para cualquier $\phi \in V\,'$ existe un único $\tau\phi \in V$ tal que $\phi(v) = (\tau\phi, v)$ para cualquier $v \in V$. Debemos encontrar un único u tal que

$$Au(v) = F(v) \quad , \quad \forall\ v \in V.$$

En otras palabras, queremos encontrar un único u tal que

$$Au = F \quad , \quad (\ \text{en}\ \ V'\ \ )$$

o

$$\tau Au = \tau F \quad , \quad (\ \text{en}\ \ V\ \ )$$

puesto que $\tau : V\,' \longrightarrow V$ es una aplicación inyectiva. Resolveremos esta última ecuación usando el Lema 2.7.2. Debemos encontrar $\rho \neq 0$ tal que la aplicación $T : V \longrightarrow V$ es una aplicación contracción, donde T es definido por

$$Tv := v - \rho(\tau Av - \tau F) \quad , \quad \forall\ v \in V$$

Si T es una contracción, entonces por el Lema 2.7.2, existe un único $u \in V$ tal que

$$Tu = u - \rho(\tau Au - \tau F) = u,$$

que es, $\rho(\tau Au - \tau F) = 0$, o $\tau Au = \tau F$.

Falta mostrar que existe $\rho \neq 0$. Para cualquier $v_1, v_2 \in V$, sea $v = v_1 - v_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\tau v_1 - \tau v_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau A v_1 - \tau A v_2)\|^2 \\
&= \|v - \rho(\tau A v)\|^2 && (\tau, A \text{ son lineales}) \\
&= \|v\|^2 - 2\rho(\tau A v, v) + \rho^2 \|\tau A v\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\rho A v(v) + \rho^2 A v(\tau A v) && (\text{definición de } \tau) \\
&= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau A v) && (\text{definición de } A) \\
&\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha \|v\|^2 + \rho^2 C \|v\| \|\tau A v\| && (\text{coercitividad y continuidad de } A) \\
&\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \|v\|^2 && (A \text{ acotado , } \tau \text{ isométrico}) \\
&= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \|v_1 - v_2\|^2 \\
&= M^2 \|v_1 - v_2\|^2 .
\end{aligned}$$

Aquí, α es la constante en la definición de coercitividad de $a(\cdot, \cdot)$.

Notar que $\|\tau A v\| = \|A v\| \leq C \|v\|$ fue usado en la desigualdad anterior. Así necesitamos

$$\begin{aligned}
1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 &< 1 \quad \text{para algún } \rho \\
\rho(\rho C^2 - 2\alpha) &< 0
\end{aligned}$$

Si elegimos $\rho \in \langle\, 0\,,\ 2\alpha/C^2 \,\rangle$ entonces $M < 1$ y se completa la prueba $\square$

Observación 1.5.8 *Notar que* $\|u\|_V \leq (1/\alpha) \|F\|_{V'}$ *donde* α *es la coercitividad constante.*

Capítulo 2

Ecuaciones semilineales fuertemente monótonas

En este capítulo presentamos el resultado principal del trabajo de tesis. Consideremos la ecuación:

$$Au + F(u) = 0 \tag{2.1}$$

Bajo condiciones adecuadas sobre el operador A y la no linealidad de F, probaremos que (2.1) posee una única solución.

2.0.1. Resultado principal

Teorema 2.0.1 *Asumamos que* $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *es máximal monótona y existen* $m, M > 0$ *tal que:*

(i) $\langle F(u) - F(v), u - v\rangle \geq m \cdot |u - v|^2$, $\forall u, v \in H$*;*

(ii) $|F(u) - F(v)| \leq M \cdot |u - v|$, $\forall u, v \in H$.

Entonces la ecuación (2.1) tiene una solución única.

DEMOSTRACIÓN.- La demostración estará basada en el siguiente Lema.

Lema 2.1 *Supongamos que* $F : H \longrightarrow H$ *satisfaciendo (i) y (ii). Entonces existe* $\lambda > 0$ *tal que* $S_\lambda : H \longrightarrow H$, $S_\lambda(u) := u - \lambda F(u)$ *es una contracción.*

Prueba:

Sea $\lambda > 0$ y $u, v \in H$. Se tiene:

$|S_\lambda(u)-S_\lambda(v)|^2 = |u-v|^2-2\lambda\langle F(u)-F(v), u-v\rangle+\lambda^2|F(u)-F(v)|^2 \leq (1-2\lambda m+\lambda^2 M^2)|u-v|^2$

Luego, tomando raiz cuadrada, en la anterior desigualdad resulta

$$|S_\lambda(u) - S_\lambda(v)| \leq c \cdot |u - v| \tag{2.2}$$

con $c := \sqrt{1 - 2\lambda m + \lambda^2 M^2} < 1 \quad , \quad \lambda \in \left\langle 0, \frac{2m}{M^2} \right\rangle$

Ahora la ecuación (2.1) puede escribirse como:

$$(I + \lambda A)u - (u - \lambda F(u)) = 0 \tag{2.3}$$

o

$$(I + \lambda A)u = S_\lambda(u) \tag{2.4}$$

Ahora tomando $\lambda > 0$ como en el lema. Usando el hecho que $(I + \lambda A)$ es inversible y $|(I + \lambda A)^{-1}| \leq 1$ para cada $\lambda > 0$ (porque A es monótona máximal), la ecuación (2.4) es equivalente con

$$u = (I + \lambda A)^{-1} S_\lambda(u) \tag{2.5}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} |(I + \lambda A)^{-1} S_\lambda(u) - (I + \lambda A)^{-1} S_\lambda(v)| &= |(I + \lambda A)^{-1}(S_\lambda(u) - S_\lambda(v))| \\ &\leq |(I + \lambda A)^{-1}| \cdot |(S_\lambda(u) - S_\lambda(v))| \\ &\leq |(S_\lambda(u) - S_\lambda(v))| \quad , \quad \forall u, v \in H \\ &\leq C|u - v| < |u - v| \quad , \quad \forall u, v \in H \end{aligned}$$

Luego la aplicación, $u \longmapsto (I+\lambda A)^{-1} S_\lambda(u)$ es una contracción , por el teorema 1.2.13 resulta que (2.5) , y consecuentemente (2.1), poseen una única solución. $\square$

Teorema 2.0.2 *Sea X , Y espacios normados y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ un operador lineal compacto. Entonces A es acotado.*

Demostración.- Sea $B = \{x \in D(A) : |\, x \,| = 1\}$

Luego B es acotado en X. Como A es compacto, $\overline{A(B)}$ es compacto, luego $\overline{A(B)}$ es acotado (y así $A(B)$ acotado, pues todo conjunto V compacto $\subseteq X$ es cerrado y acotado)

Luego

$$\sup_{\substack{x\in D(A)\\ |x|=1}} |\, Ax \,| = \sup_{x\in B} |\, Ax \,| \leq M \quad , \quad \text{para algún } M > 0 \tag{2.6}$$

Ahora bien, sea $x \in D(A)$. Si $x = 0$, no hay nada que probar (pues $A0 = 0$, por la linealidad).

Sea $x \neq 0$, $x \in D(A)$. Luego $\dfrac{x}{|x|} \in D(A)$ y $\dfrac{x}{|x|} = 1$

Luego de (2.6) :

$$\sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in D(A)}} \left| A\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq M$$

entonces

$$\left| A\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq M \quad , \quad \forall x \in D(A) \ , \ x \neq 0$$

Por lo que $|Ax| \leq M|x|$, $\forall x \in D(A)$, es decir A es acotado (y así A es contínuo). $\square$

Seguidamente probaremos un resultado similar al del Teorema 2.0.1.

Teorema 2.0.3 *Supónga que F satisface (i), (ii) del Teorema 2.0.1 y que $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ es lineal, compacto y monótono. Entonces la ecuación (2.1) posee una única solución.*

Demostración.- La ecuación (2.1) puede escribirse equivalentemente como

$$(I + \lambda A) = T_\lambda(u) \tag{2.7}$$

donde $T_\lambda(u) := \lambda u + F(u), \lambda > 0$.

Sea $\lambda > 0$ y $u, v \in H$

$$\begin{aligned} |T_\lambda(u) - T_\lambda(v)|^2 &= \lambda^2|u - v|^2 - 2\lambda\langle F(u) - F(v), u - v\rangle + |F(u) - F(v)|^2 \\ &\leq \left(\lambda^2 - 2\lambda m + M^2\right)|u - v|^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$|T_\lambda(u) - T_\lambda(v)| \leq \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda m + M^2} \cdot |u - v| \tag{2.8}$$

Observemos que si $A : D(A) \subseteq H \longrightarrow H$ es lineal y compacto, entonces es continuo por Teorema 2.0.2 y luego acotado en $D(A)$.
Elijamos $\lambda > \max\{\|A\|; \frac{M^2}{2m}\}$. En particular, $\lambda > \|A\|$ implica que $\lambda I + A$ es inversible porque $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$. Además,

$$|(\lambda I + A)u|^2 = \lambda^2|u|^2 + 2\lambda(Au, u) + |Au|^2 \geq \lambda^2|u|^2 \tag{2.9}$$

(porque es monótona), o $|(\lambda I + A)u| \geq \lambda|u|$, De aquí $|(\lambda I + A)^{-1}| \leq \dfrac{1}{\lambda}$
También la ecuación (2.7) es equivalente a

$$u = (\lambda I + A)^{-1}T_\lambda(u) \tag{2.10}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} |(\lambda I + A)^{-1}T_\lambda(u) - (\lambda I + A)^{-1}T_\lambda(v)| &= |(\lambda I + A)^{-1}(T_\lambda(u) - T_\lambda(v))| \\ &\leq |(\lambda I + A)^{-1}| \cdot |T_\lambda(u) - T_\lambda(v)| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda m + M^2} \cdot |u - v|, \forall u, v \in H \end{aligned}$$

Como $\lambda > \dfrac{M^2}{2m}$ se tiene

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2\lambda m > M^2 \\ &\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda m + M^2 < \lambda^2 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda m + M^2} < \lambda \end{aligned}$$

De ahí que $u \mapsto (\lambda I + A)^{-1}T_\lambda(u)$ es una contracción. Así la ecuación (2.10) y consecuentemente (2.1) posee una única solución. □

Observación 2.0.4 *La compacidad y acotación de A fueron usados para elegir un número $\lambda > 0$ tal que $\lambda I + A$ es inversible. Es posible una hipótesis más debil. En si mismo, la condición A compacto y acotado puede ser reemplazada con condición: espectro de A es acotado.*

Podemos establecer un resultado más general.

Teorema 2.0.5 *Sea $F : H \longrightarrow H$ satisface (i), (ii) del Teorema 2.0.1 y $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$, monótona y el espectro $\sigma(A)$ es acotado inferiormente. Entonces la ecuación (2.1) posee una única solución.*

DEMOSTRACIÓN.- Asumamos que existe $L > 0$ tal que $\sigma(A) \subseteq [L, +\infty[$. Luego $\lambda I + A$ es invertible para $\lambda < L$, así para $-\lambda > -L$: $(-\lambda)I + A$ es invertible. De ahi, basta repetir la demostración del Teorema (2.0.3) tomando $\lambda > \dfrac{M^2}{2m}$ tal que $-\lambda \in \rho(A)$. □

2.0.2. Aplicaciones

(A1). PROBLEMAS DE FRONTERA SEMILINEAL ELIPTICO

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$ teniendo la propiedad de elipticidad.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

para algún $\alpha > 0$. Consideremos el siguiente problema elíptico

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + g(x,u) = f(x) \quad , \quad \text{en } \Omega \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \qquad , \quad \text{sobre } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

Para $f \in L^2(\Omega)$. Si $g(x,u) = a_0(x)u$, con $a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), a_0 > p > 0$, $\forall x \in C(\overline{\Omega})$
Primero definimos el concepto de solución débil de (2.11).

Definición 2.0.6 .- *Diremos que $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución débil de (2.11) si:*

(i) $U \in H_0^1(\Omega)$

(ii) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega g(x,u)vdx = \int_\Omega f(x)vdx \ , \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$

- Si $g(x,u) = a_0(x)u$, definimos a forma bilineal

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ (u,v) \ &\longmapsto \ a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega a_0(x)udx \end{aligned}$$

que resulta ser (aparte de bilineal) contínua y coerciva.

De la inmersión de $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, podemos considerar $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Así nuestro problema es del tipo $Au = f$ en $H_0^1(\Omega)$, es decir

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad , \quad \forall v \in H^{-1}(\Omega)$$

donde

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + a_0 u \tag{2.12}$$

Considerando $V = H_0^1(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$, A como en (2,12) y $f \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, por la proposición 1.5.14, existe una única solución débil de (2.11)

- Ahora supongamos que $g(x, u)$ posee derivada parcial de primer orden en u y

$$m \leq \frac{\partial g}{\partial u} \leq M \quad en\ \Omega, \quad (m, M > 0) \tag{2.13}$$

Bajo estas hipótesis, el problema (2.1) posee una única solución en sentido débil, para cada $f \in L^2(\Omega)$. Así mismo, podemos aplicar Teorema (2.0.1) tomando $H = L^2(\Omega)$, $A := -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$, $D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $F(u) := g(\cdot, u) - f$.
Veamos que F satisface (i) y (ii) del teorema 2.0.1.

(a)
$$\begin{aligned}
\langle F(u) - F(v), u - v \rangle &= \langle g(x, u) - f - g(x, v) + f, u - v \rangle \\
&= \langle g(x, u) - g(x, v), u - v \rangle \\
&= \int_{\Omega} (g(x, u) - g(x, v))(u - v) dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial u}(x, \hat{u}) \right) (u - v)^2 dx \\
&\geq m \int_{\Omega} |u - v|^2 \, dx \\
&\geq m \, |u - v|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |F(u)-F(v)|^2\,dx &= \int_\Omega |g(x,u)-g(x,v)|^2\,dx \\
&\le \int_\Omega \left|\frac{\partial g}{\partial u}(x,\hat{u})\right|^2 |u-v|^2\,dx \\
&= M^2\int_\Omega |u-v|^2\,dx \\
|F(u)-F(v)|_{L^2(\Omega)} &\le M\,|u-v|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

(c) Consideremos $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ tal que $\langle Au, v\rangle = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx$, $\forall u \in D(A)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

Luego por el teorema de Lax Milgram, la ecuación

$$
u + Au = f \in L^2(\Omega)
$$

admite solución, es decir $R(I + A) = L^2(\Omega)$

$$
\langle Au, u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \ge \alpha\,|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} \ge 0 \ , \quad \forall u \in D(A)
$$

De lo anterior A es máximal monótono.

Por el Teorema 2.0.1 , el problema (2.11) admite una única solución débil.

(A2). PROBLEMAS DE PERTURBACIÓN DE LAPLACE

En [5] se ha estudiado el problema de perturbación de Laplace

$$
\begin{cases} -\Delta u + Pu = f \quad , \quad en\ \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \quad , \quad sobre\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}
$$

usando métodos diferentes a lo mostrado en este trabajo de tesis. Podemos aplicar el Teorema (2.0.1), haciendo que $P : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ satisfaga (i) y (ii). En particular, si P es diferenciable Gateaux con

$$
m\cdot|h|^2 \le \langle (DP)(u)h, h\rangle \le M\cdot|h|^2; \quad (m, M > 0) \tag{2.15}
$$

entonces (2.14) posee una única solución, porque $Au := -\Delta u$; $D(A) := H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ es máximal monótona, y por otro lado definiendo.

$$
Fu = Pu - f \quad , \quad u \in L^2(\Omega)
$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\langle Fu - Fv, u - v\rangle &= \langle (Pu - f) - (Pv - f), u - v\rangle \\ &= \langle Pu - Pv, u - v\rangle \\ &= \langle Dp(v)(u - v), (u - v)\rangle\,.\end{aligned}$$

Pero de (2.15):

$$m\,|u - v|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\langle Fu - Fv, u - v\rangle| \leq M\,|u - v|^2_{L^2(\Omega)}$$

Luego:

(i) $\langle Fu - Fv, u - v\rangle \geq m\,|u - v|^2_{L^2(\Omega)}$

(ii) $|\langle Fu - Fv, u - v\rangle| \leq M\,|u - v|^2_{L^2(\Omega)}$

$\Longrightarrow |Fu - Fv|_{L^2(\Omega)} \leq M\,|u - v|_{L^2(\Omega)}$

que son las hipótesis del Teorema 2.0.1

Capítulo 3

Conclusiones

- Se concluye que el método del punto fijo y la teoría de operadores monótonas constituyen herramientas poderosas para probar la existencia y unicidad de soluciones a problemas no lineales en ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias presentadas en forma general (abstracta).

- La ecuación abstracta (elíptica) mostrada en este trabajo tiene una gran aplicabilidad a una diversidad de situaciones físicas, lo que muestra la importancia de la generalización realizada.

- La limitación que presenta nuestro trabajo es relacionado al operador A, que es lineal; sin embargo, la metodología empleada puede ser usada para operadores no lineales (por ejemplo el operador p-Laplaciano Δ_p , $p > 1$), con ligeras adaptaciones, y que serán realizadas en un trabajo a futuro.

Bibliografía

[1] Amann H.; **On the unique solvability of the semilinear operator equations in Hilbert spaces**, J. Math. Pures Appl., 61 (1982), pp. 149-175

[2] Adams, R.A. and Fourier, J.F; **Sobolev Space**, Academic Press. Second Edition. Canada, 2009.

[3] Brezís H$\ddot{a}$im. **Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations**, Springer, New York, 2011

[4] Adam Bowers , Nigel J. Kalton **An Introductory Course in Functional Analysis**, Springer, New York, 2014

[5] Bruzual Ramon, Domínguez Maricela ; **Notas de clase: Espacios de Hilbert**, Caracas, Venezuela 2005

[6] Blasco Oscar , **Notas de clase: Análisis Funcional**

[7] Cavalcanti, M., Domingos Cavalcanti, V.; **Iniciacao a Teoría das Distribuicoes e aos Espacas de Sobolev**, Vol.I e II. Maringá, Texto de Dpto. Matemática UEM, 2000

[8] Clapp Mónica; **Introducción al Análisis Real**, Instituto de Matemáticas Universidad Nacional Autónoma de México - Agosto 2010

[9] Hasan Siddiqi Abul ; **Applied Functional Analysis (Numerical Methods, Wavelet Methods, and Image Processing)**, Marce1 Dekker, Inc., New York, 2004.

[10] Gutiérrez-Herrera William Roberto ; **Introducción a la Teoría de la Medida con Aplicaciones**, Universidad de San Carlos , Guatemala, 2010.

[11] Kreyszig Erwin ; **Introductory functional análisis with applications**, University of Windsor ; Jhon Wiley Sons. New York, Santa Barbara, London, Sydney ,Toronto, 1978.

[12] Kesavan, S. ; **Topics in Functional Analysis and Applications**, Jhon Wiley Sons. New Delhi, India, 1989.

[13] Medeiros, L. A. **Integral de Lebesgue.**. UFRJ - Brasil (2003) 5ta Edición.

[14] Medeiros, L. A. & Rivera, P. H. **Espacos de Sobolev, Equacoes Diferenciais Parciais**, Textos de Métodos Matemáticos N° 9, IM-UFRJ. Rio de Janeiro - Brasil (1975).

[15] Medeiros, L. A. y Milla Miranda M. **Introducao Aos Espacos de Sobolev o as Equacoes Diferenciais Parciais**, Rio de Janeiro 1989

[16] Mortici C.; **Semilinear equations with strongly monotone nonlinearity**, Le matematiche Vol. LII (1997) - Fasc. II, pp. 387-392

[17] Penot Jean-Paul, **Calculus Without Derivatives**, Springer, New York, 2013

[18] Rudin, Walter ; **Real and Complex**, (3ra edic.) Mc Graw-Hill. New (1987).

[19] Teodorescu D.; **Semilinear operator equations in real Hilbert space with Lipschitz nonlinearity**, Carpathian J. Math. 19 (2003), No. 2, 147-154